解　題

1.　この第 I 論文は “岡先生の数学” における第 1 主題の提示部である.

序文をもう一度読み直してみよう. 先ず当時の多変数函数論の分野に残されている主要な問題として

1. Runge の定理や Cousin の定理が成り立つ領域のタイプ.
2. Hartogs の凸性と Cartan–Thullen の凸性の関係.

が挙げられており,『この論文およびこれに続く論文で予定されているのはこれらの問題の研究である』と書かれている.[1]

このように書かれてはいるが, 岡先生は, これらの問題を並列に存在する問題群と考えておられるのではなく, したがってこれらの問題を解けるものから順次解いていこうとしておられるのではない. Cousin の問題を解くことだけなら, 本文の脚注にもある様に Weil の積分表示を Cousin 型に使うだけで解決する.[2]

上記の問題群は, その難しさが, 取り扱う領域の形に大きく依存する. 例えばその領域が各座標平面の領域の直積領域, すなわち筒状域ならば, 問題はほとんど 1 変数函数論の問題に帰着する. 実際 P. Cousin はそのようにして筒状域における Cousin 問題を解いたのである. しかし一般な領域の場合はそうではない. それで岡先生は, 最初から, 一般な領域でこれらの問題を統一的に解決するような原理を得ようとしておられるのである.

続いて序文には『考えている空間の次元を適当に上げることによって, これらの問題の困難さがときとして緩和されるのではないか』という考えが浮かんだと書かれている. これがその求めている原理であった. この漠然としたアイデアを, 岡先生と共に, “上空移行の原理” と呼ぶことにしよう. このアイデアを特別な場合に実現することで, “有理函数に関する凸状域” を筒状域に帰着させ, そうすることによって, この種の領域においても Runge の定理と Cousin の定理が共に成立することを示したのがこの論文の内容である. しかし, 重点は『このアイデアを特別な場合に実現すること』自体にあった. それで序文の最後に『これは同時に, 我々にとって不可欠な補題の, もっと一般な研究を提起するためのものでもある』と書かれている.

なお, この論文における “上空移行の原理” の実現には Cousin 第 1 問題が関与しており, 証明では, その二つの問題が, 二重帰納法によって同時に解決されるという面白い構造になっている.

2.　残された資料によると, 岡先生がこの着想を得られたのは 1935 年 8 月 29

[1] いつか岡先生は「一つの論文を理解するには, その論文の書かれた時代に身を置いて, 自分ならどうするかを考えればよい」と言われたことがある.

[2] この事については第 III 論文の脚注にも言及されており, そこではこのアイデアの先取権が H.Cartan にあることを指摘しておられる. 詳しくは第 VI 論文の [訳注 1] を参照せよ.

日であると思われる. その日の日付が書かれた研究メモ — レポート用紙 6 枚 — に, 本文の脚注 8 に書かれている H. Cartan の論文

Sur les fonctions de deux variables complexes.

からの抜粋が丁寧に書かれているからである.[3]

岡先生がそのアイデアにたどり着かれるまでの軌跡を振り返ってみよう. 先生が終生手元に置いておられた Behnke–Thullen の本は今奈良女子大学の図書館に保存されているが, その中の書き込みにより, 先生がこの本を読み始められたのが 1935 年 1 月 2 日であったことが分かる. そしてその本の, 擬凸状の問題が出てくる 54 ページには 1935.1.16 と書かれている.

この本は二カ月程で読み終え, 三月頃から研究に取りかかられた. しかしそれから三カ月もすると,「何の成果も挙げられないまま, もうどんな荒唐無稽な計画も立てれられないような」状態になったそうである. もっとも, 第 VI 論文に書かれている,「一般な擬凸状領域を強い意味の擬凸状領域で内部から近似する問題」はこの時期に解決されていたらしい. それについて先生は,「この問題が解決していないようでは, とても先に進む気にはなれない」と言っておられた.

ところで,「どんな荒唐無稽な計画も立てれられないような状態」になってから 8 月 29 日まで未だ三カ月もある. その間, 先生の言葉によれば, 大体居眠りをしていたというのである. その年の七月の終わり頃からは, 中谷宇吉郎氏の招待で札幌に滞在しておられたが, その間も殆どそのような状態で, 中谷夫人に "嗜眠生脳炎"[4] と綽名されたとか. 実際には, 朝研究を始めて暫くすると居眠りが始まり, 午後は中谷氏の研究室で将棋のコーチをしたりして過ごしたとのことであった.

問題が煮詰まって, 何もすることがなくなった頃, 研究を始めて暫くすると襲われる一種独特な眠たさを体験される方は多いと思うが, それが三カ月も続く人は希有であろう.「研究が行き詰まったら, 暫くそこから離れたほうがよい」とよく言われるが,「問題を考えだせば, それが解けるまでは止めないこと」と言われる岡先生の研究法はそれらとは異質のものである.

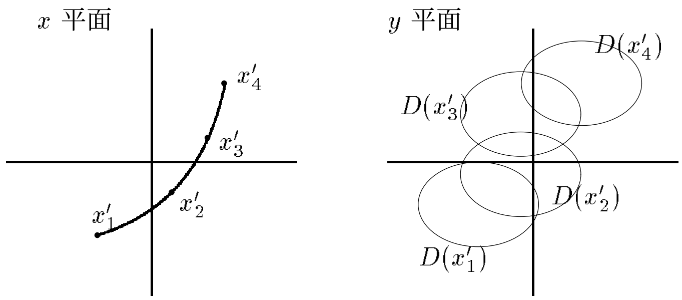
3. 1 節で述べたように, 岡先生の目標は, 最初から, 一般な領域で種々の問題を統一的に解決するような原理を得ることであった. 複素 2 変数 x と y の空間の場合, その一般な領域 D を図示するには次のようなやり方がある.

先ず一つの用紙に x 平面と y 平面を並べて考える. そしてその x 平面の或る部分 (D の x 平面への射影) に点 x' を取り, $x = x'$ による D の切り口 $D(x')$ を y 平面に描く. この $D(x')$ は x' と共に動くので, x' がその部分を動いたときの $D(z')$ の全体を頭の中で想像する.

[3]「岡潔先生遺稿集第五集」の ii ページ参照

[4] 嗜眠生脳炎は日本脳炎と混同されていたが, 1933 年に日本脳炎の病原体が分離され, 嗜眠生脳炎はそれとは別物であることが判明した. (平凡社 世界大百科事典)

x 平面上に x' を幾つか取って, y 平面上にそれらに対応する切り口 $D(x')$ を同時に描くと, それは池の面に映る木の葉の重なりのようにも見える. 居眠りの続いていた時期, 岡先生はそのような図を "緑陰図" と名付け, 毎日毎日それを描いて眺めておられた.「豹瓢乎として, 薄氷を踏むような面白さであった」とか.



ここで上記の H. Cartan の論文を簡単に紹介しよう.

2 複素変数 x, y の全空間に解析面 $S : f(x,y) = 0$ と S 上の正則函数 φ が与えられたとき, もし S が特異点を持たないなら, S の各点 q に対して q の近傍 δ_q を適当に取れば, φ の $\delta_q \cap S$ における部分は δ_q における正則函数 $\varphi_q(x,y)$ の S への制限と見なせる. それで全空間の各点 p にたいして, p の近傍 δ_p と δ_p における有理型函数 $g_p(x,y)$ を

$$
\begin{array}{lll}
g_p(x,y) \equiv 0 & \delta_P \cap S = \emptyset & P \notin S \text{ のとき} \\
g_p(x,y) = \dfrac{\varphi_q(x,y)}{f(x,y)} & \delta_p = \delta_q & p = q \in S \text{ のとき}
\end{array}
$$

のように付与すれば, 全空間における Cousin 分布が得られる. それでその解を $G(x,y)$ として

$$\Phi(x,y) = G(x,y)f(x,y)$$

と置くと, S 上での値が φ であるような整函数 $\Phi(x,y)$ が得られる.

これが H. Cartan の論文のおおよその内容である.[5] 岡先生はこの論文はかなり前に読んでおられたのであろう.

ところで, 前述の領域 D が多項式による多面体

$$|x| < r_0, \qquad |y| < r_0 \qquad |P_j(x,y)| < r_j \ (j = 1, \dots, \nu)$$

のとき, $D(x')$ は y 平面の領域 $|P_j(x', y)| < r_j$ $(j = 1, \dots, \nu)$ である. それの, x' を動かしたものの全体像を眺め続けていると, やがてそれは立体的に

[5] H. Cartan の論文では, S が特異点を持っている場合も考えられているので, もう少し複雑である. なお, その部分は第 VIII 論文で問題となる.

見えて来るであろう. そのような全体像が突然上記の H. Cartan の論文が繋がったとき, この上空移行のアイデアが生まれたのではなかろうか.[6]

4.　最後に, この論文が後に大きく訂正されている問題について説明をしておこう. 岡先生が見落とされたのは, 例えば

$$
\begin{aligned}
D \ &: \ |x| \le 1, & |y| \le 1, && |y/x| \le 1 \\
D' \ &: \ |x| \le \frac{1}{2}, & |y| \le \frac{1}{2}, && |y/x| \le \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

としたとき, D' は D の完全内部にあるわけではないということであった. 実際, D と D' は共に原点を境界点としている.

このことから来る証明の不完全さは, 有理函数にる解析多面体を考えるとき, 境界にその多面体を定義する函数の不定点が存在するようなものを除外することで簡単に補われる. ただし, 証明は帰納法であるため, 問題の順位を下げてもその条件が成り立っているようにしておかなければならない. それで次のように考える.

$R_j((x)) = P_j((x))/Q_j((x))$ $(1 \le j \le k)$ を有理函数として, 多面体

$$\Delta \ : \ x_i \in X_j, \quad R_j((x)) \in Y_j, \quad (i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, \nu)$$

を考えたとき, もしすべての k $(1 \le k \le \nu)$ にたいして $R_j((x))$ $(1 \le j \le k)$ が

$$\Delta_k \ : \ x_i \in X_j, \quad R_j(x, y) \in Y_j, \quad (i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, k)$$

の境界に不定点を持たないとき, Δ は都合よく定義されているということにする. 任意の多面体を都合よく定義することは常に可能である. 実際, $P_j((x))$ が定数でないような $R_j((x))$ があれば, それより前に $1/Q_j((x))$ があるようにしておけばよい.

それで Δ が都合よく定義されたときの ν の最小を Δ の順位と定義すれば, この訳文の多項式を有理函数に置き換えても不都合は生じない.

そうではあるが, 訳注 2 に書いたように, そのような姑息な訂正をするより, 論文全体を多項式に関する凸状域の研究とするのが正しい解決法であると思う.

[6]岡先生はこれらのいきさつについてよく話をされた. 先生の著書『春宵十話』 発見の鋭い喜び　にもそれが詳しく書かれている.